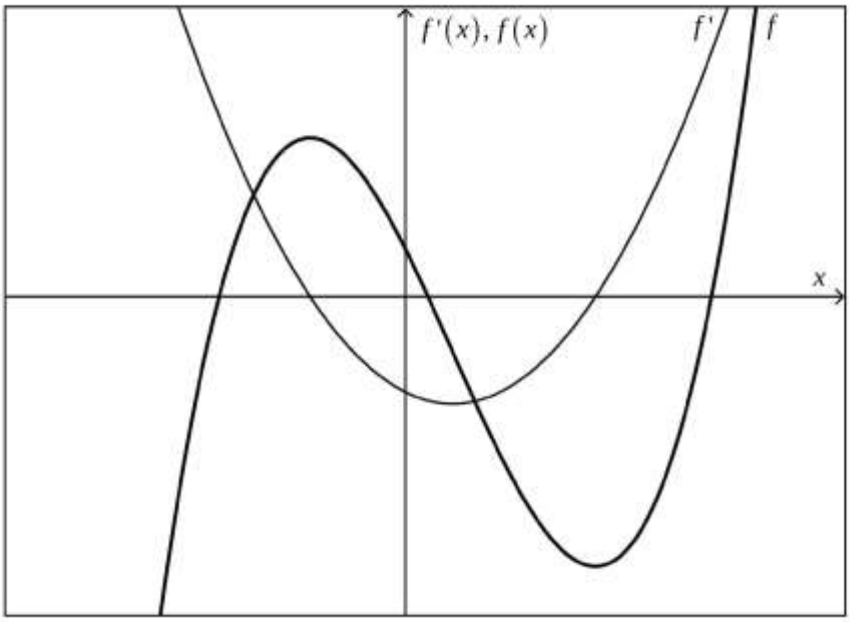
Aufgabe 1:

Modelllösung a)

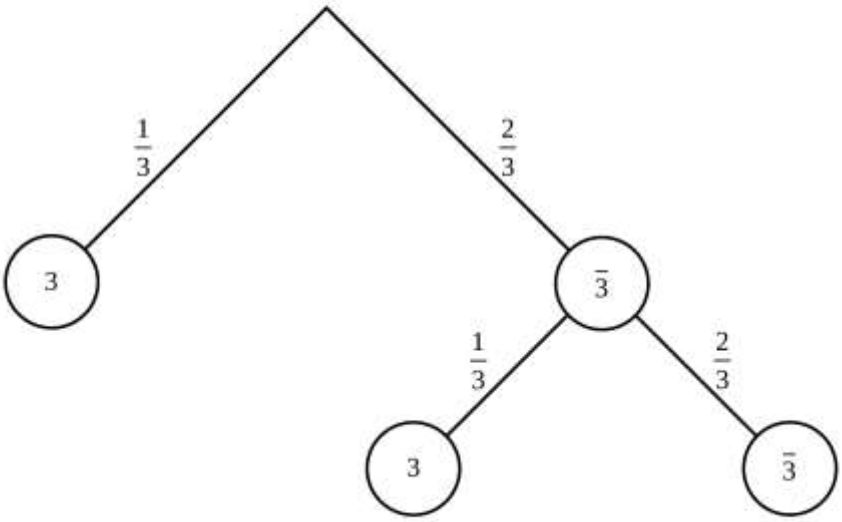
$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2\cdot x-8=0$$
$$\Leftrightarrow x=1-\sqrt{1^2+8} \vee x=1+\sqrt{1^2+8}$$
$$\Leftrightarrow x=-2 \vee x=4\,.$$

Modelllösung b)



Aufgabe 2:

Modelllösung a)



Modelllösung b)

$$P(\text{„Gewinn“})=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}\,.$$

Modelllösung c)

Erwartungswert der Auszahlung (ohne Berücksichtigung des Einsatzes):

$$\frac{5}{9}\cdot 4\,€+\frac{4}{9}\cdot 0\,€=\frac{20}{9}\,€.$$

Es werden durchschnittlich $\frac{20}{9}$ € pro Spiel ausgezahlt, d. h. ein Spieler erhält auf lange Sicht mehr zurück als seinen Einsatz von 2 €, das Spiel ist also nicht fair.

Oder:

Erwartungswert des Gewinns (unter Berücksichtigung des Einsatzes):

$$\frac{5}{9}\cdot 2\,€+\frac{4}{9}\cdot(-2\,€)=\frac{2}{9}\,€.$$

Auf lange Sicht gewinnt ein Spieler durchschnittlich $\frac{2}{9}$ € pro Spiel, das Spiel ist also nicht fair.

Aufgabe 3:

Modelllösung a)

$f(3{,}5)=-\frac{975}{256}\approx -3{,}81$.

Der Punkt $A(3{,}5\,|\,-4)$ liegt daher nicht auf dem Graphen von f.

Modelllösung b)

$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot x^3-\frac{3}{2}\cdot x$.

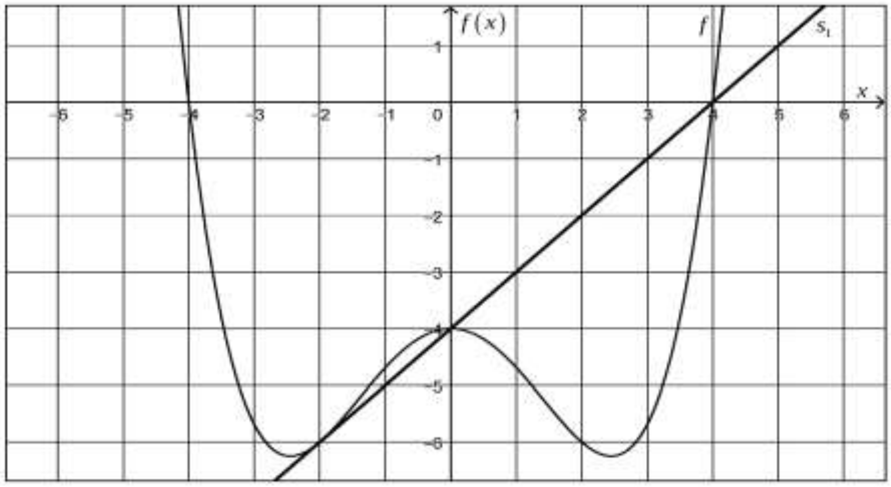
Aus der notwendigen Bedingung $f'(x)=0$ für lokale Extremstellen ergeben sich die drei Lösungen $x=-\sqrt{6}\approx -2{,}45$, $x=0$ und $x=\sqrt{6}\approx 2{,}45$.

Wegen $f'(-3)=-\frac{9}{4}<0$, $f'(-1)=\frac{5}{4}>0$, $f'(1)=-\frac{5}{4}<0$ und $f'(3)=\frac{9}{4}>0$ liegt an den Stellen $x=-\sqrt{6}$ und $x=\sqrt{6}$ jeweils ein Vorzeichenwechsel von negativen zu positiven Funktionswerten von f' und an der Stelle $x=0$ ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f' vor.

$x=-\sqrt{6}$ und $x=\sqrt{6}$ sind daher lokale Minimalstellen der Funktion f, $x=0$ ist eine lokale Maximalstelle von f.

Modelllösung c)

(1)



(2) $-2-4=-6$ und $f(-2)=-6$, d. h. an der Stelle $x=-2$ haben die Sekante s_1 und der Graph von f einen gemeinsamen Punkt.

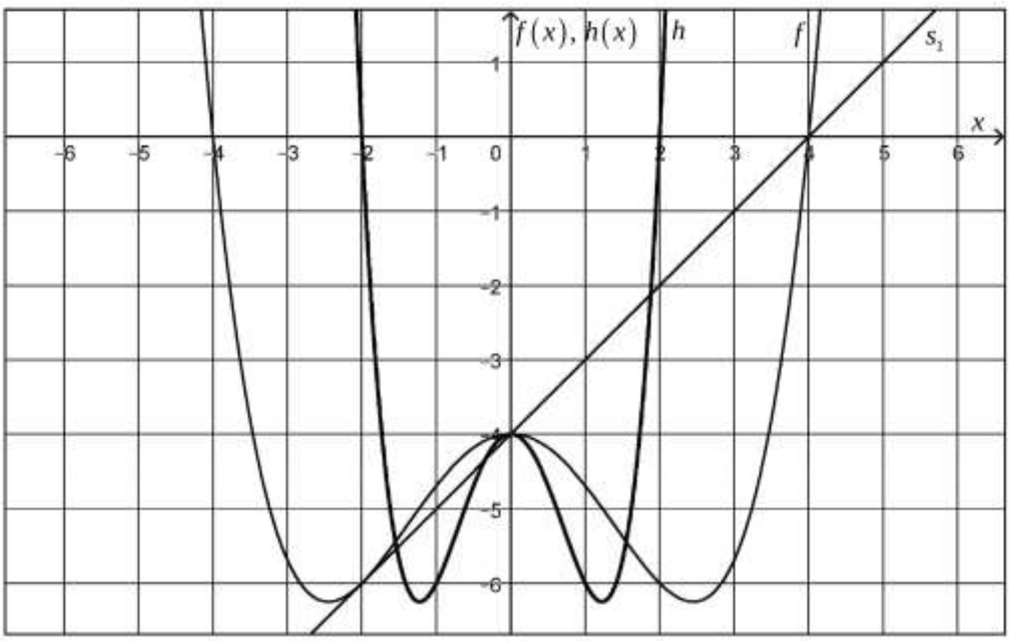
$f'(-2)=1$, d. h. an der Stelle $x=-2$ haben die Sekante s_1 und der Graph von f die gleiche Steigung.

Daher ist die Sekante s_1 zugleich Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(-2\,|\,f(-2))$.

(3) $A_1 = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4 = 8$ (FE).

Modelllösung d)

(1)



(2) Durch die angegebene Veränderung des Funktionsterms bleibt die Lage des Hochpunkts unverändert und damit die Länge einer Kathete des Dreiecks. Die zweite Kathete verkürzt sich auf die Hälfte. Somit gilt: $\frac{A_2}{A_1}=\frac{1}{2}$.

Modelllösung e)

$g(x)=f(x)+4$.

Aufgabe 4:

Modelllösung a)

(1) $s(0,1) = 13,062$.

Die Länge des Kontrollabschnitts beträgt 13,062 km.

(2) Die Durchschnittsgeschwindigkeit im Kontrollabschnitt beträgt $\frac{13,062\text{ km}}{0,1\text{ h}} \approx 131$ km/h und überschreitet damit die zulässige Höchstgeschwindigkeit von 120 km/h. Das Fahrzeug wird daher am Ende des Kontrollabschnittes geblitzt.

Modelllösung b)

(1) Die Funktion v ist die Ableitungsfunktion der Funktion s.

(2) Die Gleichung $v(t) = 120$ hat im Intervall $[0;0,1]$ nur eine Lösung t_1 mit $t_1 \approx 0,027$. Unter Verwendung des Graphen in *Abbildung 1* ergibt sich damit, dass das Fahrzeug im Zeitraum von ungefähr 0,027 h bis 0,1 h nach der Einfahrt in den Kontrollabschnit die zulässige Höchstgeschwindigkeit überschreitet.

(3) $v'(t) = -123000 \cdot t^2 + 2502 \cdot t + 734$.

Aus der notwendigen Bedingung $v'(t) = 0$ für lokale Extremstellen ergeben sich die beiden Lösungen t_2 und t_3 mit $t_2 \approx -0,068$ und $t_3 \approx 0,088$.

$t_2 \approx -0,068$ befindet sich nicht im betrachteten Intervall $[0;0,1]$.

Wegen $v'(0) = 734 > 0$ und $v'(0,1) = -245,8 < 0$ liegt an der Stelle t_3 ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von v' und damit ein lokales Maximum von v vor.

Wegen $v(0) = 100$, $v(t_3) \approx 146,3$ und $v(0,1) \approx 144,9$ beträgt die höchste Momentangeschwindigkeit im Kontrollabschnitt ungefähr 146 km/h.

(4) $v_{neu}(t) = 0,8 \cdot v(t)$

Modelllösung c)

Anhand von *Abbildung 3* wird deutlich, dass die zulässige Höchstgeschwindigkeit von 120 km/h überschritten wird.

Anhand von *Abbildung 2* ergibt sich für die durchschnittliche Geschwindigkeit $\overline{v}$ im Kontrollabschnitt: $\overline{v} \approx \frac{13\text{ km}}{0,12\text{ h}} \approx 108,3$ km/h. Die durchschnittliche Geschwindigkeit im Kontrollabschnitt ist daher kleiner als die zulässige Höchstgeschwindigkeit von 120 km/h, das Fahrzeug wird also nicht geblitzt.

Bei der Fahrt wird also die zulässige Höchstgeschwindigkeit im Kontrollabschnitt überschritten, das Fahrzeug wird aber am Ende des Kontrollabschnitts nicht geblitzt. Die Aussage trifft also zu.