Aufgabe 1:

Modelllösung a)

$f'(x)=\frac{1}{8}\cdot x^2-x$.

Modelllösung b)

$$f'(x)=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{8}\cdot x^2-x=-\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2-8\cdot x+12=0$$

$$\Leftrightarrow x=4-\sqrt{4^2-12}=2 \vee x=4+\sqrt{4^2-12}=6\,.$$

Der Graph von f hat an den Stellen 2 und 6 die Steigung $-\frac{3}{2}$.

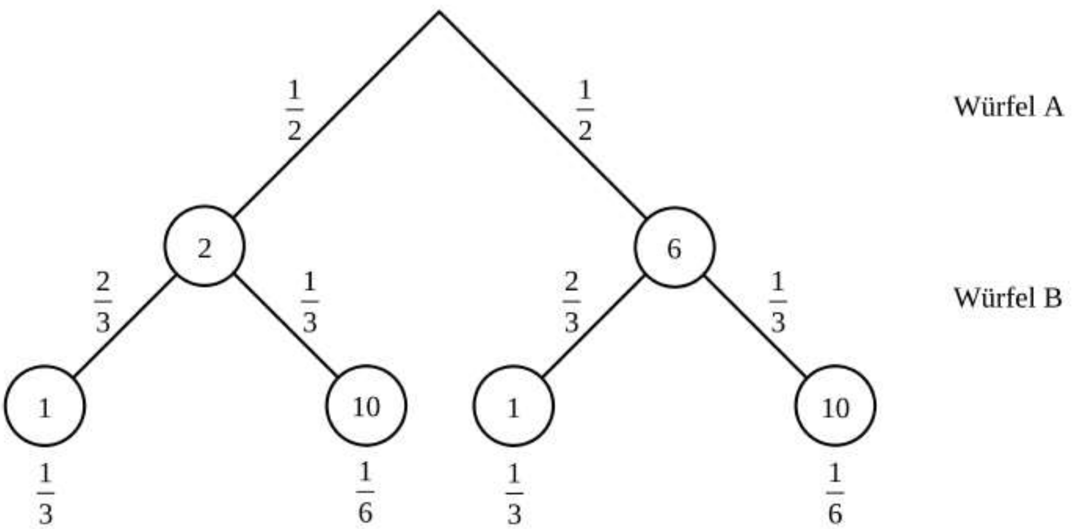
Aufgabe 2:

Modelllösung a)

Erwartungswert für die bei einem Wurf erzielte Augenzahl bei Würfel A: $2\cdot\frac{3}{6}+6\cdot\frac{3}{6}=4$.

Erwartungswert für die bei einem Wurf erzielte Augenzahl bei Würfel B: $1\cdot\frac{4}{6}+10\cdot\frac{2}{6}=4$.

Modelllösung b)



Die Wahrscheinlichkeit, dass Mia gewinnt, beträgt $\frac{2}{3}$.

Oder:

Mia gewinnt genau dann, wenn Tom eine 1 würfelt, also in 4 von 6 Fällen. Die Wahrscheinlichkeit, dass Mia gewinnt, beträgt daher $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Aufgabe 3:

Modelllösung a)

$f'(x) = 3 \cdot x^2 - 15 \cdot x + 12$.

Mit der notwendigen Bedingung $f'(x) = 0$ für lokale Extremstellen ergeben sich die beiden Lösungen $x = 1$ und $x = 4$.

Zusätzlich gilt $f'(0) = 12 > 0$, $f'(2) = -6 < 0$ und $f'(5) = 12 > 0$. Daher liegt an der Stelle $x = 1$ ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f' und an der Stelle $x = 4$ ein Vorzeichenwechsel von negativen zu positiven Funktionswerten von f' vor. $x = 1$ ist also eine lokale Maximalstelle und $x = 4$ eine lokale Minimalstelle von f.

Modelllösung b)

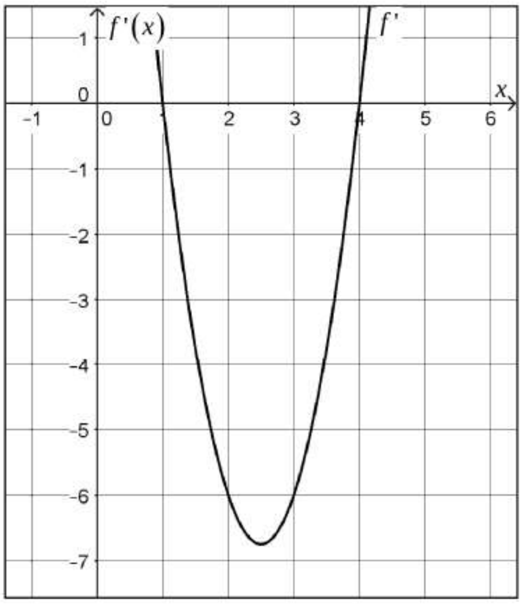
(1) $m_s = \dfrac{0 - f(0{,}5)}{1 - 0{,}5} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$.

(2) Wenn sich der Nachbarpunkt auf dem Funktionsgraphen von f dem Punkt H annähert, dann nähert sich die Steigung der Sekante durch H und den Nachbarpunkt der Zahl Null an.

Je dichter der Nachbarpunkt auf dem Funktionsgraphen an den Punkt H heranrückt, desto mehr nähert sich die Sekante durch den Nachbarpunkt und den Punkt H der Tangente an den Graphen von f im Punkt H an. Daher nähert sich die entsprechende Sekantensteigung der Steigung der Tangente an den Graphen von f im Hochpunkt H an, also der Zahl Null.

Modelllösung c)

(1)



(2) Die Aussage ist falsch.

$f'(2{,}5)$ tritt nur einmal als Funktionswert der Ableitungsfunktion f' auf. Zu der Tangente t_1 an den Graphen von f im Punkt $P_1(2{,}5 \mid f(2{,}5))$ gibt es daher keine von t_1 verschiedene Tangente t_2 an den Graphen von f, die parallel zur Tangente t_1 verläuft.

Modelllösung d)

Der Graph von g geht durch eine Spiegelung an der x-Achse aus dem Graphen von f hervor, daher gilt: $g(x) = -f(x)$.

Aufgabe 4:

Modelllösung a)

$P(0|38)$.

Um 0:00 Uhr beträgt die Körpertemperatur von King 38 °C.

Modelllösung b)

(1) $f'(t) = -0{,}00424 \cdot t^3 + 0{,}0936 \cdot t^2 - 0{,}6478 \cdot t + 1{,}3636$.

Aus der notwendigen Bedingung $f'(t) = 0$ für lokale Extremstellen ergeben sich die drei Näherungslösungen t_{E_1}, t_{E_2} und t_{E_3} mit $t_{E_1} \approx 3{,}99$, $t_{E_2} \approx 7{,}98$ und $t_{E_3} \approx 10{,}11$.

Wegen $f'(0) = 1{,}3636 > 0$ und $f'(5) = -0{,}0654 < 0$ liegt an der Stelle t_{E_1} ein Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Funktionswerten von f' und damit ein lokales Maximum von f vor.

Mit $f(t_{E_1}) \approx 40{,}00$ gilt damit:

Die Körpertemperatur von King nimmt das erste Mal um ungefähr 4:00 Uhr ein Maximum an, die Temperatur beträgt dann ungefähr 40 °C.

(2) Anhand der Abbildung ist zu erkennen, dass die niedrigste Temperatur entweder um 0:00 Uhr oder um 14:30 Uhr vorliegt, also entweder für $t = 0$ oder für $t = 14{,}5$. Wegen $f(0) = 38$ und $f(14{,}5) \approx 37{,}93$ ist die Körpertemperatur von King um 14:30 Uhr am geringsten.

Modelllösung c)

Die Gleichung $f(t) = 38{,}5$ hat zwei Lösungen t_1 und t_2 mit $t_1 \approx 0{,}40$ und $t_2 \approx 14{,}00$. Unter Verwendung des Graphen ergibt sich damit, dass die Körpertemperatur von King in einem Zeitraum von ungefähr 13,60 Stunden (13 Stunden und 36 Minuten) über 38,5 °C liegt.

Modelllösung d)

Änderungsrate der Temperatur um 14:30 Uhr (in °C pro Stunde): $f'(14{,}5) \approx -1{,}28$.

Differenz zwischen der normalen Körpertemperatur und der Temperatur um 14:30 Uhr (in °C): $36 - f(14{,}5) \approx -1{,}93$.

Dauer bis zum Erreichen der normalen Körpertemperatur (in Stunden):

$$\frac{36 - f(14{,}5)}{f'(14{,}5)} \approx 1{,}51.$$

Bei dieser Annahme hat King nach ungefähr 1,5 Stunden, also ca. um 16:00 Uhr wieder seine normale Körpertemperatur erreicht.