Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2016

Mathematik

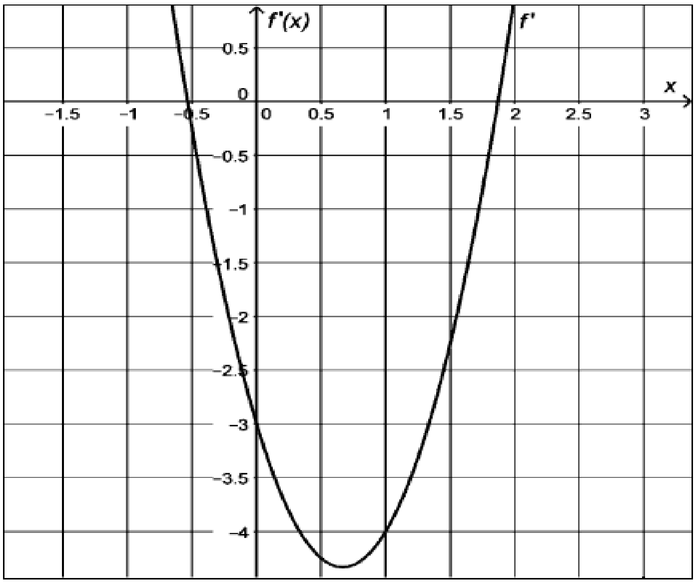
Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

Aufgabe 1: Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x$.

a) *Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.*

b) Die folgende *Abbildung* zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f'.



Abbildung

Die Ausgangsfunktion f besitzt zwei lokale Extremstellen.

Geben Sie diese unter Verwendung der Abbildung näherungsweise an und entscheiden Sie unter Verwendung der Abbildung jeweils begründet, ob es sich um eine lokale Maximal- oder Minimalstelle handelt.

(3 + 3 Punkte)

Aufgabe 2: Stochastik

In einer Bevölkerungsgruppe weisen 10 % der Personen ein genetisches Merkmal M auf.

Mit einem Test kann untersucht werden, ob eine Person dieses genetische Merkmal aufweist. Bei dem Test treten allerdings manchmal fehlerhafte Ergebnisse auf:

- Bei 5 % der Personen, die das Merkmal M aufweisen, ist das Testergebnis „negativ“, d. h. der Test zeigt fälschlicherweise an, dass die Person das Merkmal M nicht aufweist.
- Bei 2 % der Personen, die das Merkmal M nicht aufweisen, ist das Testergebnis „positiv“, d. h. der Test zeigt fälschlicherweise an, dass die Person das Merkmal M aufweist.

a) *Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten dar.*

b) Eine zufällig aus der Bevölkerungsgruppe ausgewählte Person wird getestet. Das Testergebnis ist negativ.

Stellen Sie einen Term auf, mit dem man die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen kann, dass diese Person trotzdem das Merkmal M aufweist.

(3 + 3 Punkte)

Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x)=\frac{1}{4}\cdot x^3-3\cdot x^2+9\cdot x$.

a) *Ermitteln Sie rechnerisch, für welche Werte von x der Graph der Funktion f steigt und für welche er fällt.*

(6 Punkte)

b) (1) *Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gerade* $t\colon\ y=9\cdot x-64$ *die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt* $P\left(8\,\middle|\,f(8)\right)$ *ist.*

(2) *Prüfen Sie, ob die Tangente t und der Graph von f zusätzlich zum Punkt* $P\left(8\,\middle|\,f(8)\right)$ *noch weitere gemeinsame Punkte haben.*

(4 + 3 Punkte)

c) (1) *Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion* f' *in die Abbildung 1 auf Seite 2 ein.*

(2) *Entscheiden Sie anhand des Graphen von* f'*, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidungen.*

(I) Es gibt eine weitere Tangente an den Graphen von f, die parallel zur Tangente t verläuft.

(II) Im Punkt $Q\left(3\,\middle|\,f(3)\right)$ ist die Steigung des Graphen von f minimal.

(3 + 4 Punkte)

d) Die zu den Koordinatenachsen parallelen Geraden durch den Punkt $R\left(2\,\middle|\,f(2)\right)$ bilden zusammen mit den Koordinatenachsen ein Rechteck (vgl. *Abbildung 2* auf Seite 2). Eine Gerade g durch den Ursprung $O\left(0\,\middle|\,0\right)$ des Koordinatensystems soll die Fläche dieses Rechtecks so teilen, dass die Flächeninhalte der beiden Teilflächen im Verhältnis 2:1 stehen.

Bestimmen Sie eine Gleichung einer solchen Geraden g.

(4 Punkte)

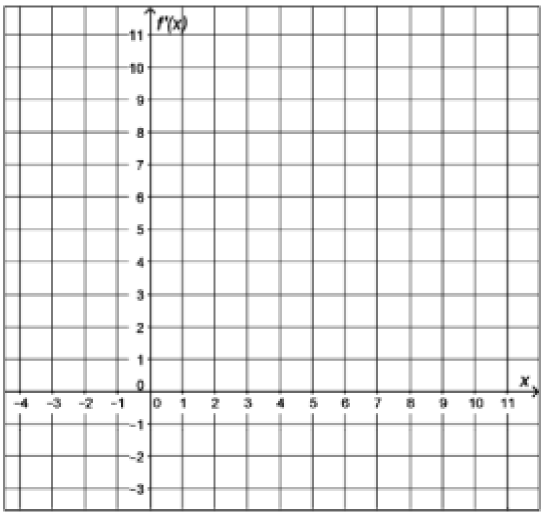


Abbildung 1

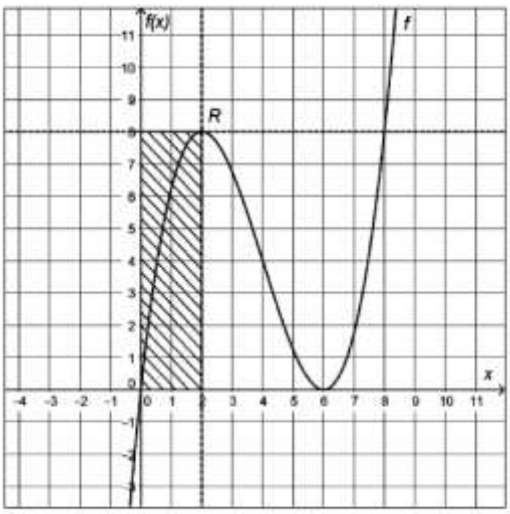


Abbildung 2

Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

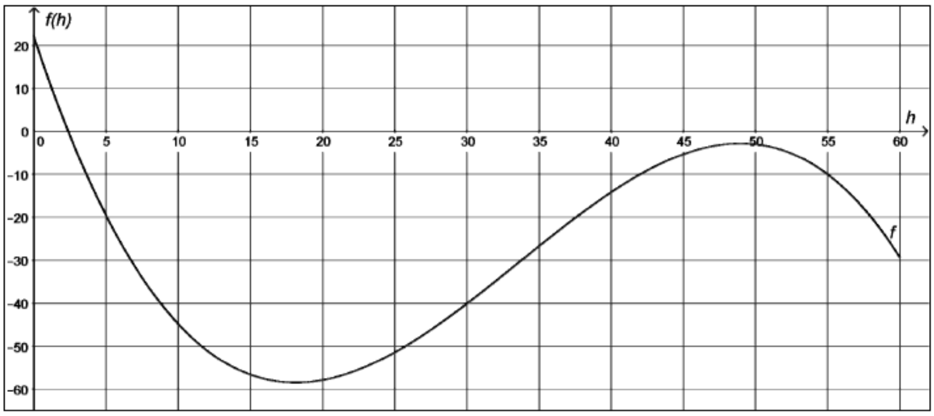
Über einem bestimmten Ort wird in verschiedenen Höhen die Temperatur gemessen. Der Ort liegt auf der Höhe des Meeresspiegels.

Der Zusammenhang, der dabei zwischen der Höhe und der Temperatur vorliegt, wird für $0 \leq h \leq 60$ durch die Funktion f mit

$$f(h) = -0{,}0038 \cdot h^3 + 0{,}3825 \cdot h^2 - 10{,}125 \cdot h + 22$$

modelliert. Dabei ist h die Höhe über dem Meeresspiegel[1] in km und $f(h)$ die in dieser Höhe vorliegende Temperatur in °C.

Die folgende *Abbildung* zeigt den Graphen von f.



Abbildung

Mit der Funktion f ist es möglich, die folgenden Aufgaben zu bearbeiten.

a) *Berechnen Sie die Temperaturen, die in Höhen von* 30 km *und* 50 km *vorliegen.*

(2 Punkte)

b) *Ermitteln Sie auf eine Nachkommastelle genau, in welcher Höhe (in* km*) die Temperatur* 0 °C *beträgt.*

(3 Punkte)

c) *Bestimmen Sie rechnerisch die niedrigste Temperatur im Bereich von* 0 km *bis* 60 km *Höhe.*

(7 Punkte)

d) *Weisen Sie nach, dass die Temperatur im Bereich von* 0 km *bis* 10 km *Höhe durchschnittlich um* 6,68 °C *pro Höhenkilometer abnimmt.*

(3 Punkte)

e) Eine Schülerin berechnet Temperaturen im Bereich von 0 km bis 10 km Höhe näherungsweise mit der einfachen Gleichung

$$g(h) = -6{,}68 \cdot h + 22 .$$

Dabei ist h wieder die Höhe in km und $g(h)$ die Temperatur in °C.

(1) *Stellen Sie den durch g gegebenen Zusammenhang zwischen der Höhe und der Temperatur in der Abbildung auf Seite 3 graphisch dar.*

(2) *Berechnen Sie für eine Höhe von* 9 km *die Abweichung zwischen den durch f und g gegebenen Temperaturen.*

(3) *Erklären Sie, wie Sie die größte Abweichung ermitteln können, die im Bereich von* 0 km *bis* 10 km *Höhe zwischen den durch f und g gegebenen Temperaturen vorliegt.*

[Hinweis: In e) (3) sind keine Berechnungen erforderlich.]

(3 + 3 + 3 Punkte)