Aufgabe 1: Analysis

Modelllösung a)

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-2\cdot x^2-3\cdot x=0$$
$$\Leftrightarrow x\cdot\left(x^2-2\cdot x-3\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=1-\sqrt{1^2+3} \vee x=1+\sqrt{1^2+3}$$
$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=-1 \vee x=3$$

Modelllösung b)

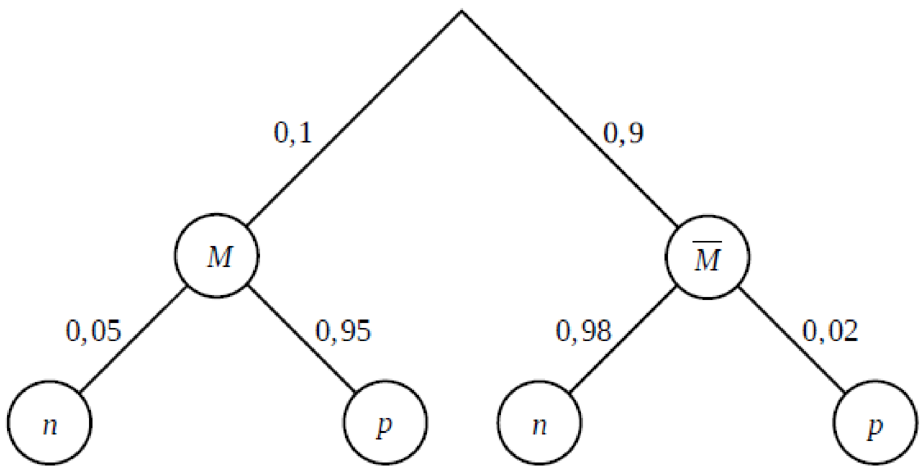
Die beiden lokalen Extremstellen der Ausgangsfunktion f liegen bei $x_1\approx-0,5$ und bei $x_2\approx1,9$. (Akzeptiert werden auch $x_1\approx-0,6$ und $x_2\approx1,8$.)

Bei x_1 liegt eine Nullstelle von f' mit einem Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von f' von + nach – vor, es handelt sich also um eine lokale Maximalstelle von f.

Bei x_2 liegt eine Nullstelle von f' mit einem Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von f' von – nach + vor, es handelt sich also um eine lokale Minimalstelle von f.

Aufgabe 2: Stochastik

Modelllösung a)



Modelllösung b)

$$P(M|n)=\frac{0,1\cdot0,05}{0,1\cdot0,05+0,9\cdot0,98}\left(=\frac{0,005}{0,005+0,882}=\frac{0,005}{0,887}\right)$$

Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Modelllösung a)

$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^2 - 6 \cdot x + 9$

Aus der Bedingung $f'(x) = 0$ ergeben sich die beiden Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.

Zusätzlich gilt $f'(0) = 9 > 0$, $f'(4) = -3 < 0$ und $f'(8) = 9 > 0$. Daher steigt der Graph von f für $x \le 2$ und für $x \ge 6$, für $2 \le x \le 6$ fällt der Graph.

[Auch die Lösung: „Daher steigt der Graph von f für $x < 2$ und für $x > 6$, für $2 < x < 6$ fällt der Graph", sollte als richtig bewertet werden.]

Modelllösung b)

(1) $9 \cdot 8 - 64 = 8$ und $f(8) = 8$, d. h. an der Stelle $x_3 = 8$ haben die Gerade t und der Graph von f einen gemeinsamen Punkt.

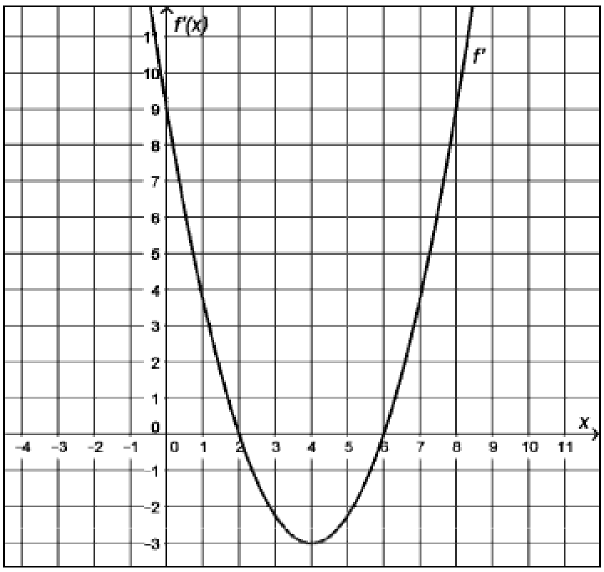
$f'(8) = 9$, d. h. an der Stelle $x_3 = 8$ haben die Gerade t und der Graph von f die gleiche Steigung.

Daher ist die Gerade t die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $P\left(8 \,\middle|\, f(8)\right)$.

(2) Die Gleichung $\frac{1}{4} \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x = 9 \cdot x - 64$ hat die Lösungen $x_3 = 8$ und $x_4 = -4$. Die Tangente t und der Graph von f haben daher noch einen weiteren gemeinsamen Punkt.

Modelllösung c)

(1)



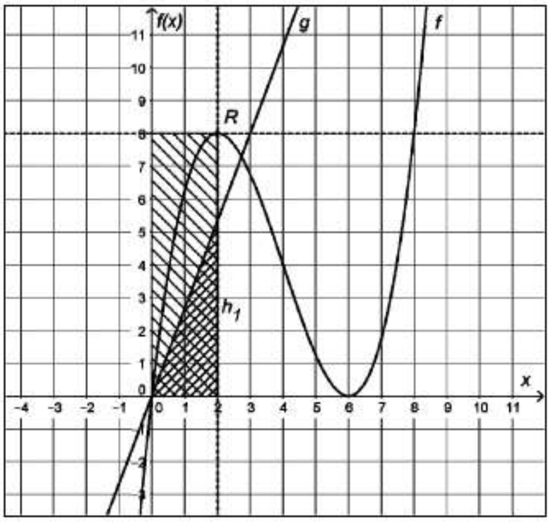
(2) (I) Der Funktionswert 9 der Ableitung f' tritt zweimal auf (an den Stellen $x_3 = 8$ und $x_5 = 0$). Daher existiert (an der Stelle $x_5 = 0$) eine weitere Tangente an den Graphen von f mit der Steigung 9, die Aussage ist daher wahr.

(II) An der Stelle $x_6 = 4$ liegt das absolute Minimum der quadratischen Funktion f' vor. Dort hat der Graph der Funktion f seine kleinste Steigung, die Aussage ist also falsch.

Modelllösung d)

Ansatz: $g: y = m \cdot x$

Die Gerade g teilt das Rechteck so, dass die Flächeninhalte der beiden Teilflächen im Verhältnis 2:1 stehen, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks (siehe nebenstehende Abbildung) ein Drittel des Flächeninhaltes des Rechtecks beträgt. Damit gilt:



$$\frac{2 \cdot h_1}{2} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot f(2) \Leftrightarrow h_1 = \frac{16}{3}$$

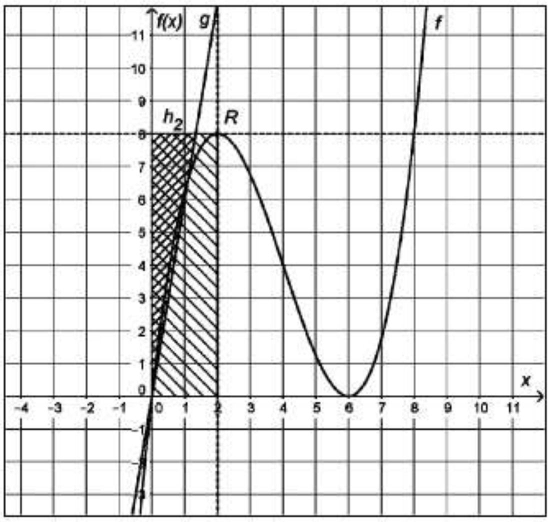
Damit gilt: $m \cdot 2 = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = \frac{8}{3}$,

also $g: y = \frac{8}{3} \cdot x$

Oder:

Ansatz: $g: y = m \cdot x$

Die Gerade g teilt das Rechteck so, dass die Flächeninhalte der beiden Teilflächen im Verhältnis 2:1 stehen, wenn der Flächeninhalt des Dreiecks (siehe nebenstehende Abbildung) ein Drittel des Flächeninhaltes des Rechtecks beträgt. Damit gilt:



$$\frac{f(2) \cdot h_2}{2} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot f(2) \Leftrightarrow h_2 = \frac{4}{3}$$

Damit gilt: $m \cdot \frac{4}{3} = f(2) \Leftrightarrow m = 6$,

also $g: y = 6 \cdot x$

Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

Modelllösung a)

$f(30) = -40,1$ und $f(50) = -3$

In 30 km Höhe liegt eine Temperatur von $-40,1$ °C vor, in 50 km Höhe beträgt sie -3 °C.

Modelllösung b)

Aus der Bedingung $f(h) = 0$ ergibt sich die Näherungslösung $h \approx 2,4$.

In einer Höhe von ungefähr 2,4 km beträgt die Temperatur 0 °C.

Modelllösung c)

$f'(h) = -0,0114 \cdot h^2 + 0,765 \cdot h - 10,125$

Aus der notwendigen Bedingung $f'(h) = 0$ für lokale Extremstellen ergeben sich die Näherungslösungen $h_1 \approx 18,14$ und $h_2 \approx 48,97$.

Zusätzlich gilt $f'(0) = -10,125 < 0$, $f'(30) = 2,565 > 0$ und $f'(60) = -5,265 < 0$. Daher liegt an der Stelle h_1 ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von f' von – nach + und damit ein lokales Minimum von f vor. An der Stelle h_2 wechselt das Vorzeichen der Funktionswerte von f' von + nach –, es handelt sich um eine lokale Maximalstelle von f. Wegen $f(0) = 22$, $f(h_1) \approx -58,5$ und $f(60) = -29,3$ liegt bei h_1 das absolute Minimum von f im Intervall $[0;60]$ vor.

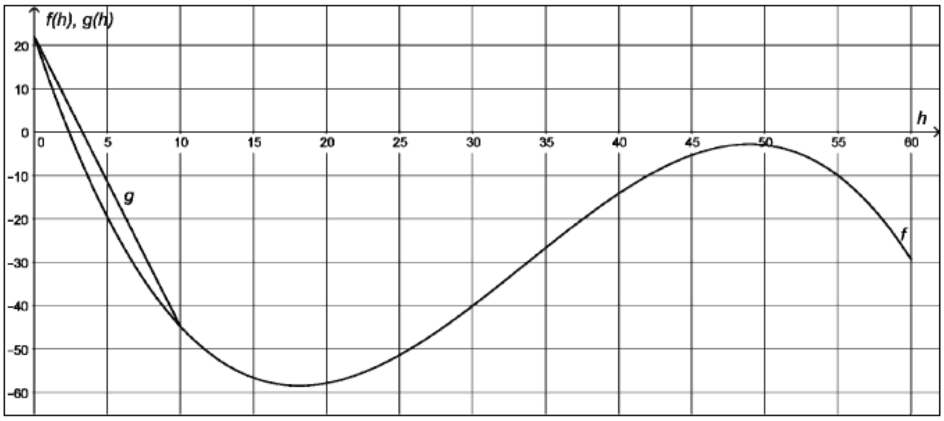
Die niedrigste Temperatur im Bereich von 0 km bis 60 km Höhe beträgt ungefähr $-58,5$ °C.

Modelllösung d)

$\frac{f(10) - f(0)}{10 - 0} = -6,68$, d. h. im Bereich von 0 km bis 10 km Höhe nimmt die Temperatur durchschnittlich um 6,68 °C pro Höhenkilometer ab.

Modelllösung e)

(1)



(2) $g(9) - f(9) = 2,7927$

Für eine Höhe von 9 km beträgt die Abweichung zwischen den durch f und g gegebenen Temperaturen ungefähr 2,8 °C.

(3) Die größte Abweichung, die im Bereich von 0 km bis 10 km Höhe zwischen den durch f und g gegebenen Temperaturen vorliegt, kann ermittelt werden, indem das absolute Maximum der Differenzfunktion d mit $d(x) = g(x) - f(x)$ auf dem Intervall $[0;10]$ bestimmt wird.