

Aufgabe 1:

Gegeben ist die **Ableitungsfunktion** f' mit der Gleichung

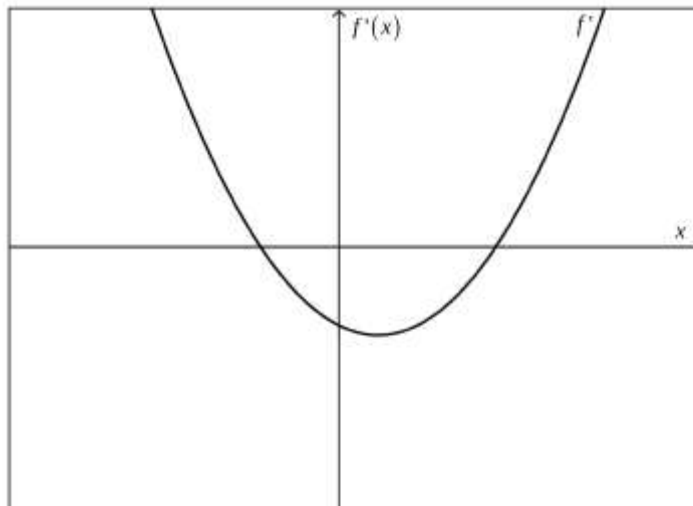
$$f'(x) = x^2 - 2 \cdot x - 8, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f' .

(3 Punkte)

b) Die Abbildung zeigt den Graphen von f' .

Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen einer möglichen **Ausgangsfunktion** f .



Abbildung

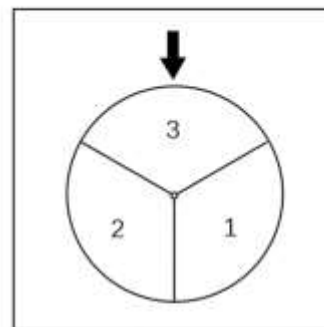
(3 Punkte)

Aufgabe 2:

Beim Glücksspiel „3 gewinnt“ wird ein Glücksrad mit drei gleich großen Feldern (siehe *Abbildung*) höchstens zweimal gedreht. Der Einsatz für das Spiel beträgt 2 €.

Erscheint nach dem ersten Drehen die Zahl „3“, hat man gewonnen und das Spiel ist beendet. Erscheint eine andere Zahl, erhält man eine zweite Chance und darf noch einmal drehen. Erscheint nun die „3“, hat man ebenfalls gewonnen und das Spiel ist endgültig beendet. Erscheint keine „3“, ist das Spiel ebenfalls beendet.

In den beiden Fällen, in denen die Zahl „3“ erscheint, erhält man den Einsatz von 2 € zurück und bekommt 2 € hinzu, ansonsten verliert man seinen Einsatz.



Abbildung

a) Erstellen Sie für dieses Zufallsexperiment ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm mit allen Pfadwahrscheinlichkeiten.

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeit.

(2 Punkte)

c) Ein Spiel ist „fair“, wenn ein Spieler auf lange Sicht weder Gewinn noch Verlust macht.

Untersuchen Sie, ob das Spiel „3 gewinnt“ fair ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{16} \cdot x^4 - \frac{3}{4} \cdot x^2 - 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Der Graph der Funktion f ist in der folgenden *Abbildung 1* dargestellt.

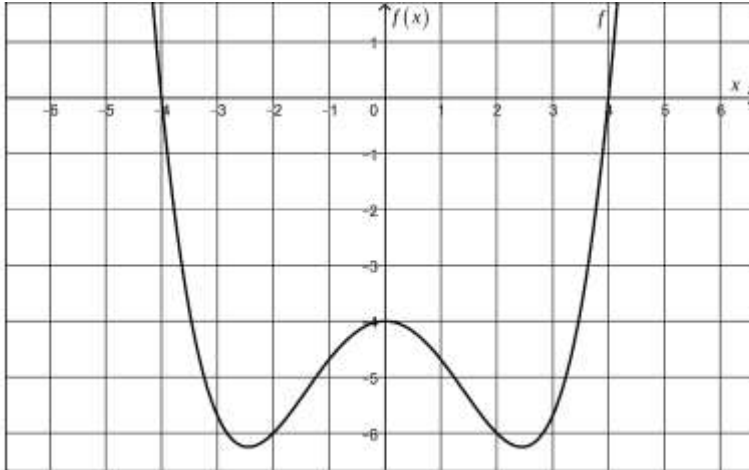


Abbildung 1

a) Untersuchen Sie, ob der Punkt $A(3,5 | -4)$ auf dem Graphen von f liegt. (2 Punkte)

b) Untersuchen Sie die Funktion f rechnerisch auf lokale Extremstellen.

(7 Punkte)

c) s_1 ist die Sekante durch den lokalen Hochpunkt $H(0 | -4)$ und den Schnittpunkt $N_1(4 | 0)$ des Graphen von f mit der x -Achse. Die Gleichung dieser Sekante ist

$$s_1: y = x - 4.$$

[Ein Nachweis der Gleichung ist nicht erforderlich.]

(1) Zeichnen Sie die Sekante s_1 in die *Abbildung 1* ein.

(2) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Sekante s_1 zugleich eine Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(-2 | f(-2))$ ist.

(3) Die Sekante s_1 bildet zusammen mit den Achsen des Koordinatensystems das Dreieck OHN_1 .

Berechnen Sie den Flächeninhalt A_1 dieses Dreiecks.

(2 + 3 + 2 Punkte)

d) Gegeben ist die Funktion h mit der Gleichung

$$h(x) = f(2 \cdot x) = x^4 - 3 \cdot x^2 - 4, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(1) Zeichnen Sie den Graphen von h in die *Abbildung 1* ein.

(2) Legt man nun wie in Aufgabenteil c) eine Sekante s_2 durch $H(0 | -4)$ und den Schnittpunkt N_2 des Graphen von h mit der positiven x -Achse, so ergibt sich das Dreieck OHN_2 . Der Flächeninhalt dieses Dreiecks wird mit A_2 bezeichnet.

Ermitteln Sie das Verhältnis $\frac{A_2}{A_1}$.

(3 + 2 Punkte)

- e) In der *Abbildung 2* sehen Sie den Graphen einer Funktion G . Der Graph der zugehörigen Ableitungsfunktion g ist durch eine Verschiebung in y -Richtung aus dem Graphen der Funktion f entstanden.

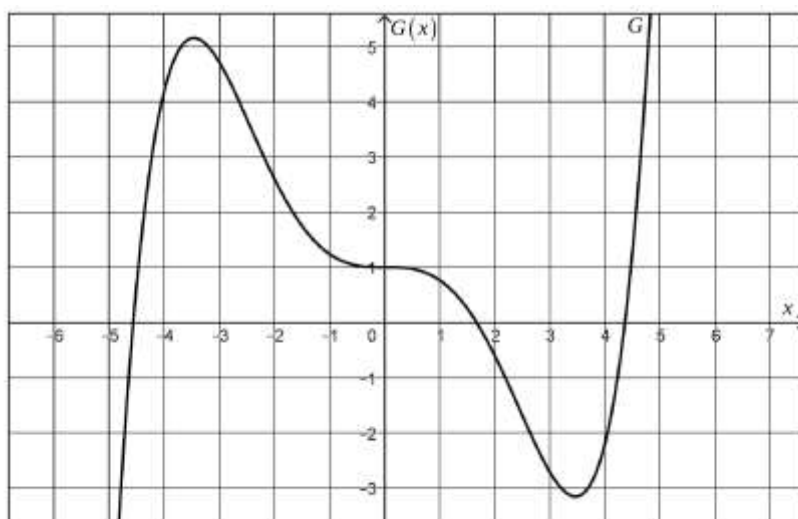


Abbildung 2

Geben Sie eine Gleichung von g an.

(3 Punkte)

Aufgabe 4:

Geschwindigkeitskontrollen – NRW will Strecken-Radar testen

„Auf den Straßen Nordrhein-Westfalens soll das sogenannte Strecken-Radar erprobt werden. Dabei wird auf einem Kontrollabschnitt die Zeit an einem Anfangs- und am Endpunkt gemessen und daraus die durchschnittliche Geschwindigkeit von Fahrzeugen ermittelt. Ist der Fahrer [im Durchschnitt] zu schnell, wird er geblitzt und der Verstoß geahndet.“¹

Ein Testfahrzeug fährt in den Kontrollabschnitt eines Strecken-Radars ein, in dem eine zulässige Höchstgeschwindigkeit von 120 km/h gilt. Das Fahrzeug durchfährt den gesamten Abschnitt in 0,1 Stunden. Die auf \mathbb{R} definierte Funktion s mit

$$s(t) = -10250 \cdot t^4 + 417 \cdot t^3 + 367 \cdot t^2 + 100 \cdot t$$

wird im Folgenden für $0 \leq t \leq 0,1$ zur Modellierung dieser Fahrt verwendet. Dabei gibt t die Zeit in h (Stunden) seit der Einfahrt in den Kontrollabschnitt und $s(t)$ die bis dahin im Kontrollabschnitt zurückgelegte Strecke in km an.

- a) (1) Bestimmen Sie die Länge des Kontrollabschnittes (in km), d. h. die vom Fahrzeug im Zeitraum von $t = 0$ bis $t = 0,1$ zurückgelegte Strecke.
- (2) Entscheiden Sie begründet, ob das Fahrzeug am Ende des Kontrollabschnitts geblitzt wird.

(2 + 3 Punkte)

Die Momentangeschwindigkeit des Testfahrzeugs in km/h wird für $0 \leq t \leq 0,1$ durch die auf \mathbb{R} definierte Funktion v mit

$$v(t) = -41000 \cdot t^3 + 1251 \cdot t^2 + 734 \cdot t + 100$$

modelliert. Die *Abbildung 1* zeigt den Graphen der Funktion v .

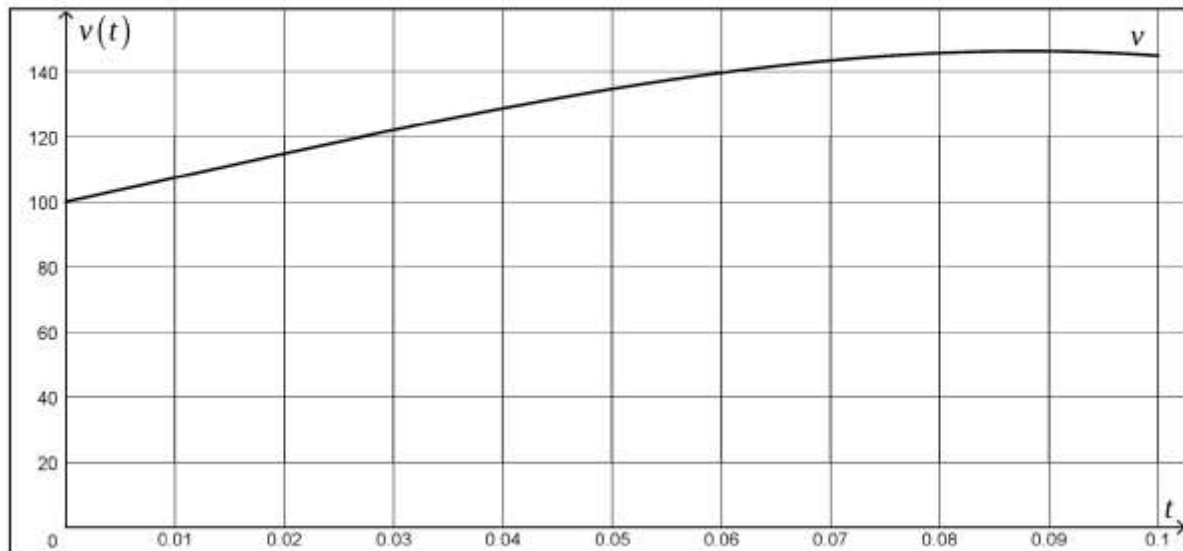


Abbildung 1

b) (1) *Geben Sie an, welcher mathematische Zusammenhang zwischen den Funktionen s und v besteht.*

(2) *Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem bei der Fahrt durch den Kontrollabschnitt die Momentangeschwindigkeit des Fahrzeugs größer ist als die zulässige Höchstgeschwindigkeit von 120 km/h.*

(3) *Bestimmen Sie rechnerisch die höchste Momentangeschwindigkeit des Fahrzeugs im Kontrollabschnitt.*

(4) *Wenn das Fahrzeug zu jedem Zeitpunkt während der Fahrt durch den Kontrollabschnitt um 20 % langsamer fahren würde, dann würde es nicht geblitzt werden.*

Die Geschwindigkeit einer solchen langsameren Fahrt soll durch die Funktion v_{neu} modelliert werden.

Geben Sie eine Gleichung der Funktion v_{neu} an.

(2 + 3 + 8 + 2 Punkte)

- c) In den folgenden beiden *Abbildungen 2* und *3* sind für eine andere Fahrt des Testfahrzeuges die zurückgelegte Strecke und die Momentangeschwindigkeit beim Durchfahren des Kontrollabschnitts dargestellt.

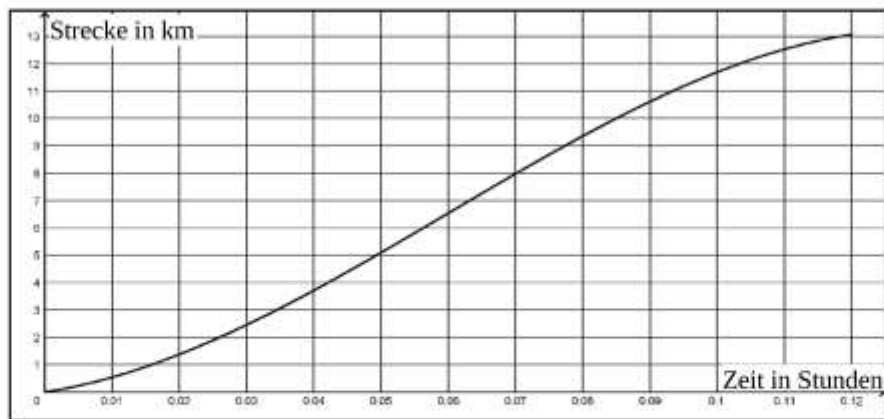


Abbildung 2

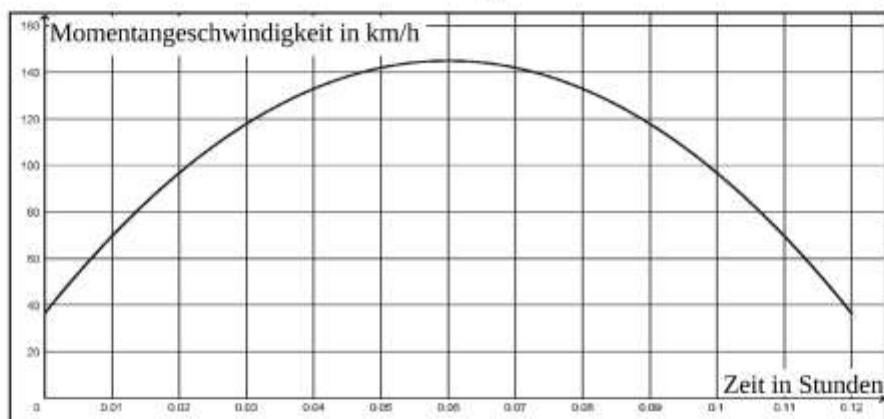


Abbildung 3

Begründen Sie anhand der Abbildungen, dass die folgende Aussage zutrifft:

Obwohl ein Fahrzeug im Kontrollabschnitt die zulässige Höchstgeschwindigkeit überschritten hat, ist es dennoch möglich, dass das Fahrzeug am Ende des Kontrollabschnitts nicht geblitzt wird.

(4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- GTR (Graphikfähiger Taschenrechner) oder CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung