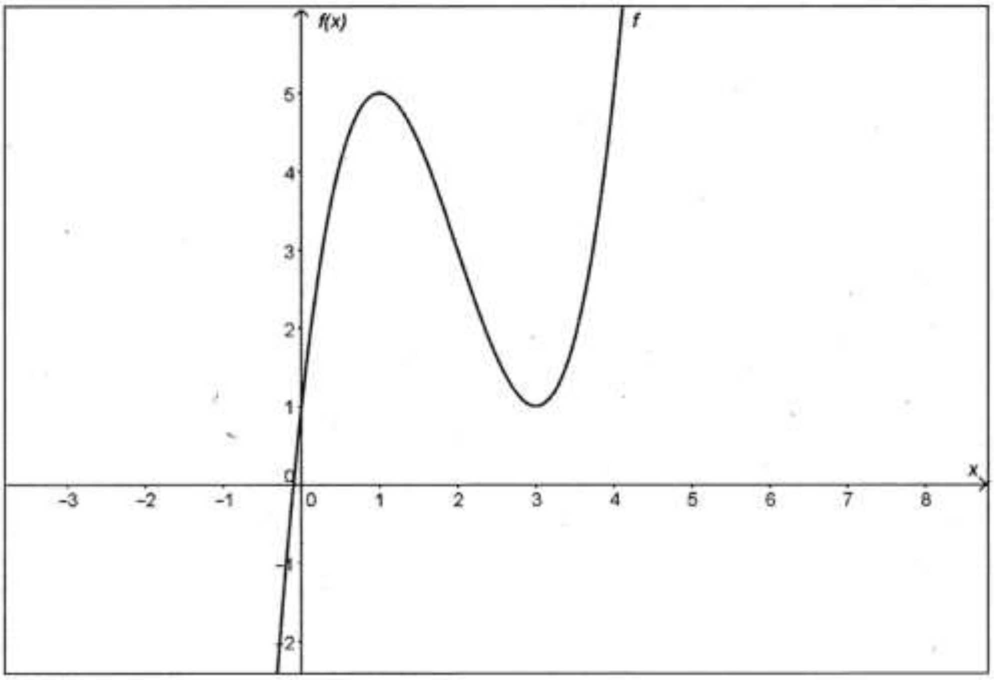
Aufgaben mit Hilfsmittel **Haupttermin**

Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 1$.

Die *Abbildung* zeigt den Graphen von f.



Abbildung

a) *Ermitteln Sie auf drei Nachkommastellen genau die Nullstelle der Funktion f.*

(2 Punkte)

b) *Ermitteln Sie rechnerisch den lokalen Hochpunkt und den lokalen Tiefpunkt des Graphen von f.*

(7 Punkte)

c) *Zeichnen Sie in die Abbildung die Sekante s durch die Punkte* $P(2 \mid 3)$ *und* $Q(3 \mid 1)$ *ein.*

Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung dieser Sekante s.

(6 Punkte)

d) Ein Schüler möchte am Beispiel der Funktion f in einem Referat erklären, wie deren Ableitung $f'(a)$ an einer Stelle a näherungsweise ermittelt werden kann. Dazu hat er eine *Tabelle* angelegt.

Term	$\frac{f(2,4)-3}{2,4-2}$	$\frac{f(2,3)-3}{2,3-2}$	$\frac{f(2,2)-3}{2,2-2}$	$\frac{f(2,1)-3}{2,1-2}$
Wert	$-2,84$	$-2,91$	$-2,96$	$-2,99$

Tabelle

Geben Sie an, um welche Stelle a es sich hier handelt.

Erklären Sie, warum die Tabellenwerte sich immer mehr der Ableitung $f'(a)$ annähern.

(4 Punkte)

e) Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion g mit der Gleichung

$$g(x) = x^3 - 9 \cdot x^2 + 24 \cdot x - 18.$$

Ermitteln Sie, durch welche Transformationen der Graph der Funktion g aus dem Graphen der Funktion f hervorgeht, und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

(5 Punkte)

Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

Früher wurden in den Städten auf Hügeln oder kleineren Bergen Wassertürme gebaut. Durch das in den Türmen gespeicherte Wasser konnte ein ausreichender Wasserdruck für die Versorgung der Wohnungen mit Trinkwasser sichergestellt werden.

Im Folgenden soll die Wassermenge im Speicher eines Wasserturms untersucht werden.

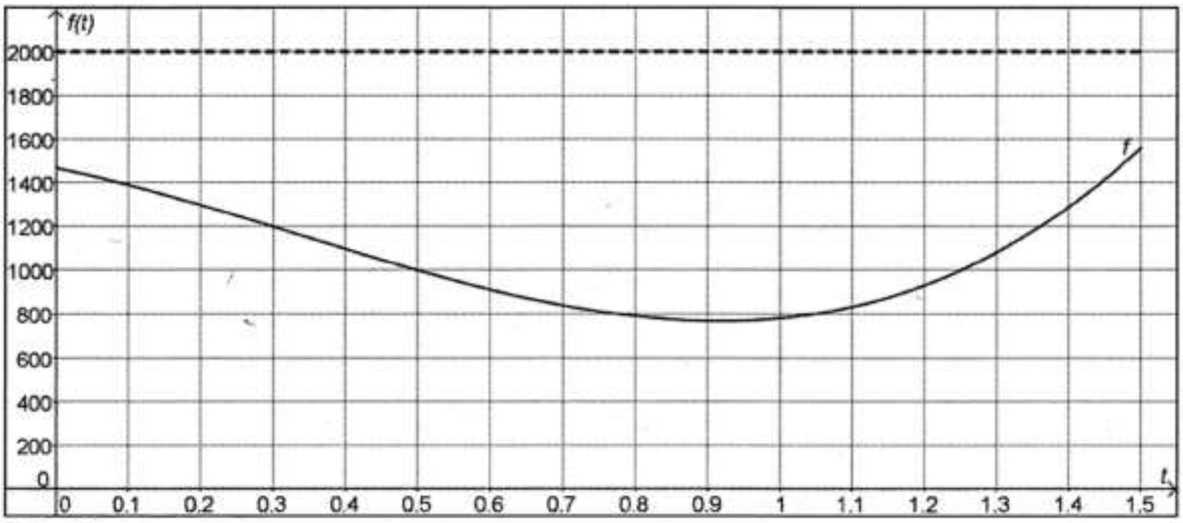
Um den nötigen Wasserdruck zu gewährleisten, soll dafür gesorgt werden, dass ständig mindestens 1000 m^3 Wasser (Sollwert) im Speicher des Turmes vorhanden sind. Die maximale Füllmenge beträgt 2000 m^3.

Für einen bestimmten Tag wird die Wassermenge im Speicher des Turmes im Zeitraum von 6:00 Uhr bis 7:30 Uhr für $0 \le t \le 1{,}5$ durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 1000 \cdot t^3 - 1000 \cdot t^2 - 687 \cdot t + 1467$$

modelliert. Dabei bezeichnet t die Zeit in Stunden, die seit 6:00 Uhr vergangen ist, und $f(t)$ die Wassermenge im Speicher des Turmes in m^3.

Der Graph der Funktion f ist in der folgenden *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

Mit der Funktion f ist es möglich, die folgenden Aufgabenstellungen zu bearbeiten.

a) (1) *Zeigen Sie, dass um 7:00 Uhr nur noch 780 m^3 Wasser im Speicher des Turmes vorhanden sind.*

(2) *Ermitteln Sie näherungsweise die Zeiträume, in denen die Wassermenge über dem Sollwert von 1000 m^3 liegt.*

(2 + 4 Punkte)

b) *Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Wassermenge im Speicher des Turmes minimal ist.*

Berechnen Sie, um wie viele m^3 Wasser der Sollwert zu diesem Zeitpunkt unterschritten wird.

(8 Punkte)

c) *Berechnen Sie* $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$ *und* $f'(1)$ *und interpretieren Sie die berechneten Werte im Sachzusammenhang.*

(4 Punkte)

d) Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion g mit der Gleichung

$$g(t) = -1000 \cdot t^3 + 1000 \cdot t^2 + 687 \cdot t + 533.$$

(1) *Zeichnen Sie den Graphen von g in die Abbildung ein.*

(2) *Erklären Sie, welche Bedeutung die Funktionswerte* $g(t)$ *mit* $0 \le t \le 1{,}5$ *im Sachzusammenhang haben.*

(4 + 2 Punkte)

Aufgaben mit Hilfsmittel **Nachtermin**

Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = 0{,}625 \cdot x^3 - 3{,}75 \cdot x^2 + 5{,}625 \cdot x + 1{,}25.$$

a) *Ermitteln Sie auf zwei Nachkommastellen genau die Nullstelle der Funktion f.*

(2 Punkte)

b) (1) *Ermitteln Sie* $f'(x)$ *und zeigen Sie, dass* $f'(x) = 1{,}875 \cdot (x-1) \cdot (x-3)$ *gilt.*

(2) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass* $x = 1$ *und* $x = 3$ *die lokalen Extremstellen von f sind.*

(3 + 4 Punkte)

c) (1) *Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung der Geraden g, die durch die beiden lokalen Extrempunkte* $E_1(1|f(1))$ *und* $E_2(3|f(3))$ *des Graphen von f verläuft.*

(2) Der Graph von f besitzt Stellen, an denen die jeweilige Tangente parallel zur Geraden g mit der Gleichung $y = -1{,}25 \cdot x + 5$ verläuft.

Ermitteln Sie Näherungswerte (gerundet auf zwei Stellen nach dem Komma) für diese Stellen.

(5 + 3 Punkte)

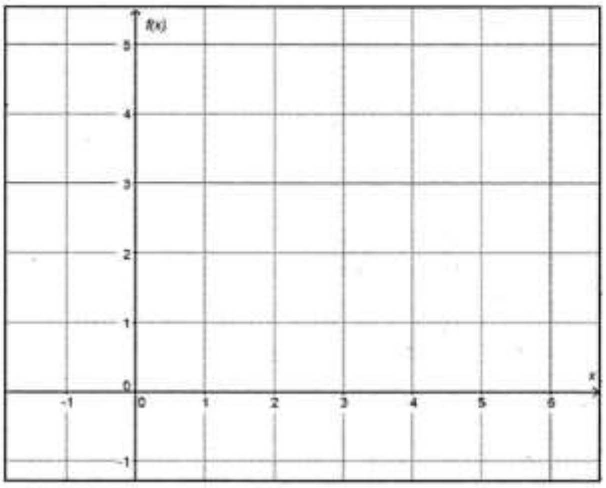
d) (1) *Skizzieren Sie in der nebenstehenden Abbildung den Graphen der Funktion f.*

(2) Die Funktion f ist die Ableitungsfunktion einer Funktion F.

Entscheiden Sie begründet unter Verwendung des Graphen von f, ob die Aussagen (I) und (II) wahr oder falsch sind.

(I) Der Graph der Funktion F hat im Intervall $-\infty < x \le 0$ einen Tiefpunkt.

(II) Der Graph der Funktion F ist im Intervall $1 \le x \le 3$ monoton fallend.



Abbildung

(3 + 4 Punkte)

Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

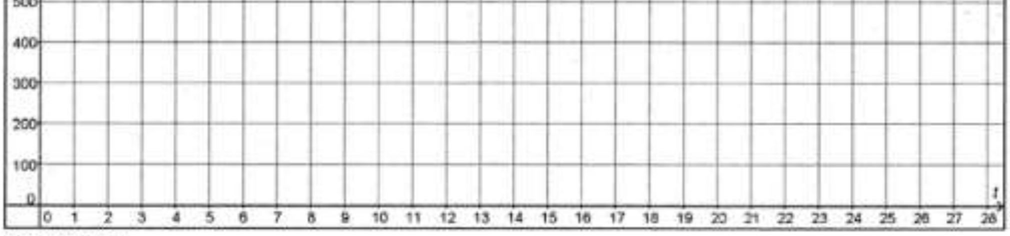
Der Anbieter der Suchmaschine Google hat festgestellt, dass die Häufigkeit der Eingabe bestimmter Suchbegriffe ein Anhaltspunkt für die Häufigkeit von Grippeerkrankungen sein kann. Für „Google Grippe-Trends" werden Daten der Google-Suche gesammelt und ausgewertet. Auf Grundlage der Ergebnisse wird anschließend nahezu in Echtzeit die Häufigkeit von Grippeerkrankungen geschätzt (http://www.google.org/flutrends, letzter Zugriff am 26.04.2015).

Die von Google geschätzte Anzahl von Grippeerkrankungen pro 100000 Einwohnern in NRW für Februar 2014 kann für $0 \le t \le 28$ näherungsweise durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = -0{,}015 \cdot t^3 - 0{,}5 \cdot t^2 + 24{,}5 \cdot t + 900$$

modelliert werden.

Dabei ist t die Zeit in Tagen, die seit dem Beginn des Monats Februar 2014 vergangen ist. $t = 0$ entspricht also 0:00 Uhr am 01. Februar, $t = 1$ entspricht 0:00 Uhr am 02. Februar usw. $f(t)$ ist die von Google geschätzte Anzahl der Grippeerkrankungen pro 100000 Einwohner in NRW zur Zeit t. Die *Abbildung* zeigt den Graphen der Funktion f für $0 \le t \le 28$.



Abbildung

Mit dieser Funktion f ist es möglich, die folgenden Aufgabenstellungen zu bearbeiten.

a) *Berechnen Sie die geschätzte Anzahl der Grippeerkrankungen pro* $100\,000$ *Einwohner in NRW zu Beginn und am Ende des Monats Februar 2014.*

(2 Punkte)

b) (1) *Ermitteln Sie rechnerisch für Februar 2014 den Tag, an dem die geschätzte Anzahl der Grippeerkrankungen pro* $100\,000$ *Einwohner am größten war.*

(2) Die Einwohnerzahl in NRW betrug im Februar 2014 etwa 17,6 Mio.

Ermitteln Sie eine Abschätzung für die größte Anzahl von Grippeerkrankungen in ganz NRW im Februar 2014.

(6 + 2 Punkte)

c) *Bestimmen Sie näherungsweise den Zeitraum im Februar 2014, in welchem die geschätzte Anzahl der Grippeerkrankten in Nordrhein-Westfalen mehr als 1 % der Einwohnerzahl betrug.*

(4 Punkte)

d) Für ein anderes Bundesland wird die geschätzte Anzahl der Grippeerkrankungen pro $100\,000$ Einwohner für Februar 2014 für $0 \leq t \leq 28$ durch die Funktion g mit der Funktionsgleichung

$$g(t) = -0{,}015 \cdot t^3 - 0{,}32 \cdot t^2 + 27{,}78 \cdot t + 594{,}96$$

modelliert.

(1) *Skizzieren Sie in der Abbildung auf der vorherigen Seite den Graphen von g.*

(2) *Interpretieren Sie den unterschiedlichen Verlauf der Graphen von f und g im Sachzusammenhang.*

Der Graph der Funktion g entsteht, indem der Graph von f nacheinander parallel zu den beiden Koordinatenachsen verschoben wird.

(3) *Ermitteln Sie, durch welche konkreten Transformationen der Graph der Funktion g aus dem Graphen der Funktion f hervorgeht, und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.*

(3 + 3 + 4 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Graphikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Computeralgebrasystem (CAS)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung